

## محاضرات الدفتر

القسم : تحليل رياضية السنة : الرابعة المادة : منطق رياضي المحاضرة : الثانية

إذا كان  $(N, \leq)$  مرتبة جزئياً  
 $x \leq y \Leftrightarrow x \leq y$

مثال 1-

$$E = \{1, 2, 3\}$$

مجموعة مرتبة جزئياً

$$P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}$$

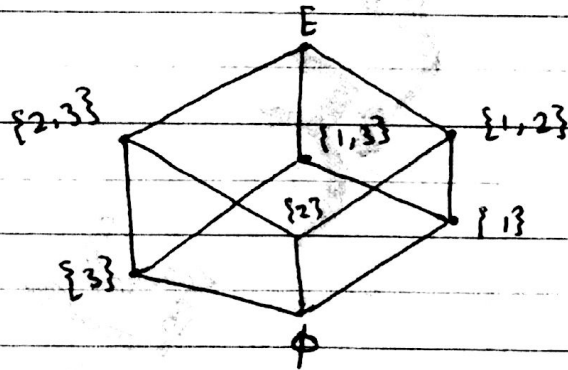
لنعرف على هذه المجموعة علاقة  $\subseteq$  أي

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

انفكاكية - قياسية - متعدية - وبالتالي هي علاقة ترتيب  
 $(P(E), \subseteq)$  م. م. م.

$\{1\}$ ،  $\{2\}$  عنصران غير مقارنين

ارسم مخطط هاز لهذه المجموعة المرتبة جزئياً



مثال 2-

$$X = \{a, a\}$$

لتكن لدينا

$$P = \{\emptyset, \{a\}\}$$

$$Q = \{\emptyset, \{a\}\}$$

ولنعرف على  $P \times Q$

$$(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leq a_2 \text{ و } b_1 \leq b_2$$

والمطلوب

ارسم  $P \times Q$  و  $(P \times Q, \leq)$  جزئياً ثم ارسم مخطط هاز لها

$$P \times Q = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{a\}), (\{a\}, \emptyset), (\{a\}, \{a\})\}$$

# محاضرات الدفتر

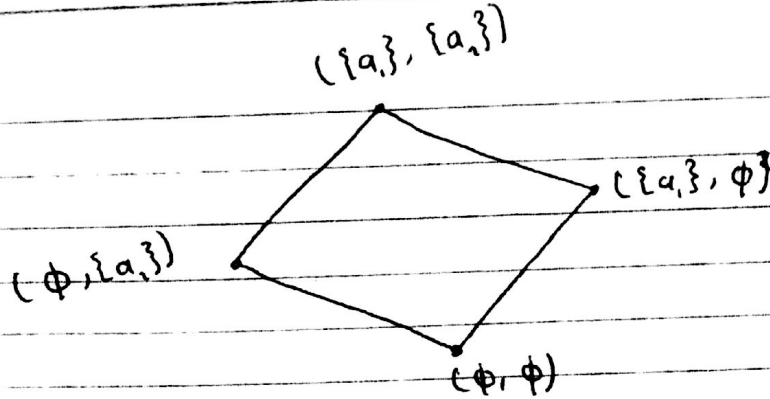
المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

علاقة ترتيب جزئياً .



العناصر الأصغر والعناصر الأعظمية

تعريف 1 -

لتكن  $(E, \leq)$  م.م. 2. عندئذ فإن :

(1) - إذا كان يوجد في  $E$  عنصرك وحيث أن :

$$\forall x \in E, x \leq y$$

فإن  $y$  يسمى عنصراً أكبر في المجموعة  $E$  وبالمقابل .

(2) - إذا كان يوجد في  $E$  عنصرك  $p$  بحيث يحقق :

$$\forall x \in E, p \leq x$$

نسمى  $p$  عنصراً أصغر للمجموعة  $E$  في المثال ، ابق  $(\leq, |A|)$

الأصغر  $\phi$  ، الأكبر  $E$

في المثال ، ابق العنصر الأصغر  $(\phi, \phi)$  ، والعنصر الأكبر  $(\{a_i\}, \{a_j\})$

تعريف 2 -

إذا كانت  $(E, \leq)$  م.م. 2. عندئذ فإن :

(1) - إذا كان يوجد في  $E$  عنصرك  $m$  بحيث أنه لا يوجد في  $E$  عنصراً يحقق العلاقة :

$$x \neq m, m \leq x$$

في هذه الحالة نسمى  $m$  عنصراً أعظمياً في  $E$ .

(2) - إذا كان يوجد في  $E$  عنصرك  $n$  بحيث أنه لا يوجد في  $E$  عنصراً  $x$

يحقق الشرط .

$$x \neq n, x \leq n$$

# محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

نشير  $n$  عنصراً أصغرياً في المجموعة  $E$  موهنة :

إذا كانت  $E$  مجموعة منتهية ومرتبة جزئياً فإنها تحتوي حتماً على عنصر أعظمياً واحد على الأقل وكذلك على عنصر أصغري واحد على الأقل. علامات :

١- إذا كانت  $E$  مجموعة غير منتهية فقد تحتوي على عناصر أصغرية أو أعظمية أو لا تحتوي على أي منها.

٢- إذا كانت  $p$  عنصراً غير متناهياً في  $E$  فإن  $p$  هو عنصر أصغري وأعظمي في نفسه.

٣- العنصر الأكبر في المجموعة المرتبة جزئياً هو عنصر أعظمي فيما والعنصر الأصغر في المجموعة المرتبة جزئياً هو عنصر أصغري ولكن العكس غير صحيح في الحالة العامة.

مثال :

لناخذ المجموعة التالية :

$$E = \{2, 3, 4, 9\}$$

٣. 2. بعلامات، علامة :

عناصر العناصر الأعظمية والأصغرية ؟

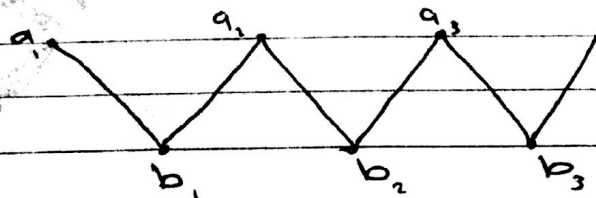
العناصر الأعظمية 4, 9

العناصر الأصغرية 2, 3

ولا يوجد عنصر أكبر وأصغر.

مثال ١

أوجد العناصر الأعظمية والأصغرية في هذه المجموعة المرتبة جزئياً وفقط مخطط هاس :



العناصر الأصغرية  $b_1, b_2, b_3, \dots$

# محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

$a_1, a_2, a_3, \dots$

العناصر الاعلى

- المجموعات الجزئية المحدودة

تعريف ٣-

لتكن  $(E, \leq)$  م.م. ج. وليكن  $A \subseteq E$  غير طالية عندنا

(1) - إذا كان يوجد في  $E$  عنصراً مثل  $s$  فيه يكون

$$z \leq s ; \forall z \in A$$

في هذه الحالة نسمي  $s$  حداً أعلى للمجموعة  $A$  في  $E$

(2) - وإذا كان يوجد في  $E$  عنصراً مثل  $t$  فيه يكون

$$t \leq x ; \forall x \in A$$

في هذه الحالة نسمي  $t$  حداً أدنى للمجموعة  $A$  في  $E$

مثال :

$$A = \{2, 3, 4, 9\} \text{ م.ج.}$$

جزئية من مجموعة  $(N, \leq)$  م.ج.  $E = (N, \leq)$  بعلامة العتمة

الحدود الأعلى

$$t \in \mathbb{Z}^+ ; 36t$$

الحدود الأدنى 1-

36 أصغر الحدود العليا ، 1 أكبر الحدود الدنيا

تعريف ٤-

لتكن  $A$  مجموعة جزئية من  $E$  فيه  $(E, \leq)$  نقول عن العنصر  $s \in E$

أنه هو أعلى أصغر لـ  $A$  إذا حققت الشروط التالية :

(1)  $s$  هو أعلى لـ  $A$  في  $E$

(2)  $s$  أصغر الحدود العليا التي هي أعلى لـ  $A$  في  $E$  فإن

$s$  هي في هذه الحالة نكتب رمزاً :

$$\sup A = s$$

تماماً نقول إن العنصر  $t \in E$  هو أدنى أعظم لـ  $A$  في  $E$  إذا حققت الشرطان

التاليان :

# محاضرات الدفتر

المحاضرة :

المادة :

السنة :

القسم :

(11)  $t$  هو أدنى.

(12)  $t$  أكبر الحدود، لدينا أي أنه إذا وجد  $t$  من  $E$  هو أدنى  $A$  في  $E$  فإن

$$t \in E \text{ ونكتب } \inf A = t$$

ملاحظة :

ليس من الضروري أن يكون للمجموعة الجزئية  $\sup$  ,  $\inf$

وإذا وجد أي منها فإنه قد ينتمى إلى المجموعة  $A$  أو لا ينتمى.

تعريف :

نسبي، المجموعة، مرتبة كلياً مجموعة مرتبة جيداً إذا كانت كل مجموعة جزئية غير حالية منها تحتوي على عنصر أصغر.

مثال :

مجموعة الأعداد الطبيعية  $(\mathbb{N}, <)$  تحت علاقة الترتيب الطبيعي هي مجموعة مرتبة جيداً في حين مجموعة الأعداد الصحيحة تحت علاقة الترتيب نفسها مجموعة غير مرتبة جيداً.

مثال :

$(\mathbb{R}, <)$  ترتيبه طبيعي ولكنه

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

$\sup$  ,  $\inf$

$$\sup A = 1$$

$$\inf A = 0$$

استنتج بالحدثة